高三数学试卷参考答案

题序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
答案	A	D	C	A	A	B	D	B	ABD	BD	ABC	抚州	3	$[-9,-2)\cup(1,2)$

【评分细则】

【1】第 1～8 题，凡与答案不符的均不得分.

【2】第 9，11 题，全部选对的得 6 分，有选错的不得分，每选对一个得 2 分；第 10 题，全部选对的得 6 分，有选错的不得分，每选对一个得 3 分.

【3】第 12，13，14 题，其他结果均不得分.

1. A **【解析】本题考查集合的并集与一元二次不等式的解法，考查数学运算的核心素养.**
由 $A=(-5,10)$，$B=(7,12)$，得 $A\cup B=(-5,12)$.

2. D **【解析】本题考查复数的概念与运算，考查数学运算的核心素养.**
由 $z_1+z_2=3i$，得 $|z_1+z_2|=3$，z_1+z_2 为纯虚数，z_1+z_2 的虚部为 3.

3. C **【解析】本题考查对数函数图象的定点问题，考查逻辑推理与数学运算的核心素养.**
令 $x^3-7=1$，得 $x=2$，所以点 A 的横坐标为 2.

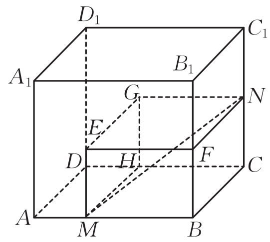
4. A **【解析】本题考查抛物线的定义，考查直观想象与数学运算的核心素养.**
设 C 的焦点为 F，则 $F(-1,0)$，则 $d+|PA|=|PF|+|PA|\geqslant|AF|=\sqrt{6^2+8^2}=10$，则 $d+|PA|$ 的最小值为 10.

5. A **【解析】本题考查排列组合与古典概型(跨学科交汇)，考查数学运算与逻辑推理的核心素养.**
由表可知，从 1250 年到 1900 年，平方年在明朝的个数为 4，则他选取的年份至少有 2 个在明朝的概率为 $\dfrac{C_4^3+C_4^2C_4^1}{C_8^3}=\dfrac{1}{2}$.

6. B **【解析】本题考查椭圆的几何性质与正弦定理，考查直观想象与逻辑推理的核心素养.**
因为 $\sin\angle PF_2F_1=5\sin\angle PF_1F_2$，且 P,F_1,F_2 三点不共线，所以由正弦定理得 $|PF_1|=5|PF_2|$，又 $|PF_1|+|PF_2|=2a$，所以 $|PF_2|=\dfrac{a}{3}$. 因为 $a-c\leqslant|PF_2|\leqslant a+c$，所以 $2a\leqslant 3c$，又 P,F_1,F_2 三点不共线，所以 $2c<2a<3c$，由 $|F_1F_2|=2c=4$，得 $c=2$，所以 $4<2a<6$，即 C 的长轴长的取值范围是 $(4,6)$.

7. D **【解析】本题考查三角恒等变换与三角函数的性质，考查数学运算与逻辑推理的核心素养.**
$f(x)=\dfrac{1-\cos(2x+2\varphi)}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x+2\varphi)=\sin\left(2x+2\varphi-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}$. 由 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，得 $2x+2\varphi-\dfrac{\pi}{6}\in\left(2\varphi-\dfrac{\pi}{6},2\varphi+\dfrac{\pi}{3}\right)$，因为 $-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $2\varphi-\dfrac{\pi}{6}\in\left(-\dfrac{7\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right)$，$2\varphi+\dfrac{\pi}{3}\in\left(-\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}\right)$，依题意可得 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant 2\varphi-\dfrac{\pi}{6}<2\varphi+\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，解得 $\varphi\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{12}\right]$.

8. B **【解析】本题考查正方体的截面问题与几何体的体积，考查空间想象能力.**



如图，构造长方体 $EFNG\text{-}MBCH$，MN 是其体对角线，其体积 $V_3=3\times4\times6=72$. 设线段 MN 的中点为 O_1，过 MN 的平面为 α（图略），则平面 α 将长方体 $EFNG\text{-}MBCH$ 分成的两个几何体关于点 O_1 对称，体积都为 $\frac{1}{2}V_3=36$，而正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的体积 $V=6^3=216$. 不妨设 $V_1\geqslant V_2$，则 $V_1\leqslant216-36=180$，$V_2\geqslant36$，$|V_1-V_2|_{\max}=180-36=144$.

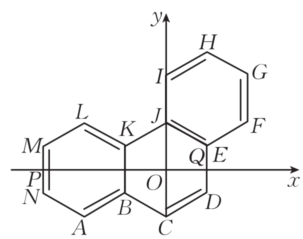
9. ABD **【解析】本题考查基本不等式、充分必要条件及等比数列，考查数学运算与逻辑推理的核心素养.**

$f(x)=2^x+2^{-x}-a\geqslant2\sqrt{2^x\cdot2^{-x}}-a=2-a$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，所以 $p=2-a$.

由 $x>1$，得 $x-1>0$，则 $g(x)=x-1+\frac{1}{x-1}+1-a\geqslant2+1-a=3-a$，当且仅当 $x=2$ 时，等号成立，所以 $q=3-a$. 当 $a=1$ 时，$p=1$，A 正确. $\forall a\in\mathbf{R}$，$p-q=2-a-(3-a)=-1$，B 正确. 若 p,q,a 成等比数列，则 $(2-a)a=(3-a)^2$，整理得 $2a^2-8a+9=0$，因为 $\Delta<0$，所以方程无解，C 错误.

由 $f(0)>0$，得 $a<2$，由 $g(2)>0$，得 $a<3$，则"$f(0)>0$"是"$g(2)>0$"的充分不必要条件，D 正确.

10. BD **【解析】本题以化学分子的结构图为情境考查平面向量的综合，考查直观想象、数学建模及数学运算的核心素养.**



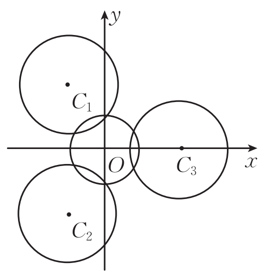
由图可知，$\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\rangle=\pi-\angle ABC=\pi-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$，A 错误. 连接 AL（图略）. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{DE}$，B 正确.

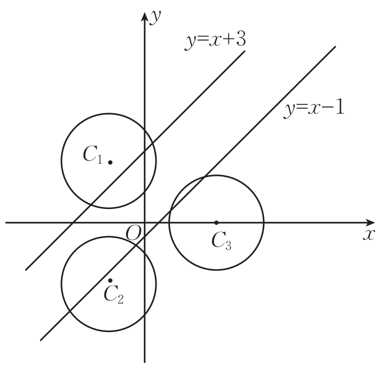
分别取 MN，DE 的中点 P，Q，以正六边形 $BCDEJK$ 的中心为坐标原点，PQ 所在直线为 x 轴，JC 所在直线为 y 轴，建立如图所示的平面直角坐标系，不妨设 $AB=2$，则 $B(-\sqrt{3},-1)$，$I(0,4)$，$M(-3\sqrt{3},1)$，$G(2\sqrt{3},4)$. 连接 BM，BG，BI（图略），则 $\overrightarrow{BM}=(-2\sqrt{3},2)$，$\overrightarrow{BG}=(3\sqrt{3},5)$，$\overrightarrow{BI}=(\sqrt{3},5)$，则 $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BG}=-18+10=-8=-2|\overrightarrow{AB}|^2=-2\overrightarrow{AB}^2$，$\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{BI}=9+25=34=\frac{17}{2}|\overrightarrow{AB}|^2\neq8\overrightarrow{AB}^2$，C 错误，D 正确.

11. ABC **【解析】本题考查直线与圆的综合，考查直观想象、逻辑推理及数学运算的核心素养.**

依题意可知 C_1 为圆 $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2=4$，$C_2$ 为圆 $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2=4$，$C_3$ 为圆 $(x-3)^2+y^2=4$，这 3 个圆的半径均为 2，且 $|OC_1|=|OC_2|=|OC_3|=3$. 当 $r=4-\sqrt{10}$ 时，$|OC_1|>r+2$，则圆 O 与这 3 个圆都外离，所以 Ω 与圆 O 无公共点，A 正确. 当 Ω 与

圆 O 有 6 个公共点时,圆 O 与这 3 个圆都相交,则 $|r-2|<3<r+2$,解得 $1<r<5$,B 正确.
设过原点的直线为直线 l,当 l 与这 3 个圆中的 1 个圆相离时,l 至少会与另外 2 个圆中的 1 个圆不相离,所以不存在过原点的直线与 Ω 无公共点,C 正确.
因为到直线 $y=x+1$ 的距离为 $\sqrt{2}$ 且与其平行的直线为 $l_1:y=x-1$,$l_2:y=x+3$,且 $C_1\left(-\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ 到直线 l_1 的距离为 $\frac{5+3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}>2$,到直线 l_2 的距离为 $\frac{3\sqrt{3}-3}{2\sqrt{2}}<2$,$C_2\left(-\frac{3}{2},-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ 到直线 l_1 的距离为 $\frac{3\sqrt{3}-5}{2\sqrt{2}}<2$,到直线 l_2 的距离为 $\frac{3+3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}>2$,
$C_3(3,0)$ 到直线 l_1 的距离为 $\sqrt{2}<2$,到直线 l_2 的距离为 $3\sqrt{2}>2$,所以直线 l_1,l_2 与 Ω 共有 6 个公共点,即 Ω 上有 6 个点到直线 $y=x+1$ 的距离为 $\sqrt{2}$,D 错误.





12. 抚州　**【解析】本题考查统计中的百分位数,考查数据处理能力.**
将这 11 个数按照从小到大的顺序排列为 2,3,4,5,9,10,11,12,13,13,18,因为 $11\times60\%=6.6$,所以这 11 个数组成的数据的第 60 百分位数为 11,对应的地级市为抚州市.

13. 3　**【解析】本题考查导数的应用,考查直观想象、数学建模及数学运算的核心素养.**
设 $AB=x$,$BC=y$,则 $3x+2y=12(0<x<4)$,得 $y=6-\frac{3}{2}x$,则 $S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$,$S_2=x\left(6-\frac{3}{2}x\right)$. 设函数 $f(x)=S_1\cdot S_2=\frac{\sqrt{3}}{4}x^3\left(6-\frac{3}{2}x\right)(0<x<4)$,则 $f'(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(18x^2-6x^3)$,当 $0<x<3$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增,当 $3<x<4$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,则当 $AB=x=3$ 时,$f(x)$ 取得最大值,即 S_1S_2 取得最大值.

14. $[-9,-2)\cup(1,2)$　**【解析】本题考查函数的奇偶性、单调性,考查数学抽象、直观想象及逻辑推理的核心素养.**
设 $x_1,x_2\in(0,10]$,且 $x_1<x_2$,则 $x_1-x_2<0$,所以 $(x_2^4+1)f(x_1)-(x_1^4+1)f(x_2)>0$,即 $\frac{f(x_1)}{x_1^4+1}>\frac{f(x_2)}{x_2^4+1}$. 设函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x^4+1}$,易得 $g(x)$ 在 $(0,10]$ 上单调递减. 因为 $f(x)$ 为 $[-10,0)\cup(0,10]$ 上的奇函数,$y=x^4+1$ 为偶函数,所以 $g(x)$ 为 $[-10,0)\cup(0,10]$ 上的奇函数,且 $g(x)$ 在 $[-10,0)$ 上单调递减. 因为 $g(1)=\frac{f(1)}{2}=2$,$g(3)=\frac{f(3)}{82}=-2$,所以

$g(-3)=-g(3)=2$. 由 $f(x-1)>2(x^4-4x^3+6x^2-4x+2)$,得 $\frac{f(x-1)}{(x-1)^4+1}>2$,即 $g(x-1)>2$,则 $x-1\in[-10,-3)\cup(0,1)$,解得 $x\in[-9,-2)\cup(1,2)$.

15.**【解析】本题考查相互独立事件的概率、离散型随机变量的分布列及均值,考查数学运算与逻辑推理的核心素养及应用意识.**

解:分别用 X,Y,Z 表示完成 A,B,C 三个手工作品的事件,则 X,Y,Z 相互独立.

(1)用 D 表示该成员未获得制作手工作品 C 的资格,

则 $P(D)=P(\overline{X})+P(X\overline{Y})=1-0.8+0.8\times(1-0.5)=0.6$. ……………………………… 5 分

(2)T 的可能取值为 0,200,800,2 000, ……………………………………………………………… 6 分

$P(T=0)=P(\overline{X})=1-0.8=0.2$, ……………………………………………………………………… 7 分

$P(T=200)=P(X\overline{Y})=0.8\times(1-0.5)=0.4$, ………………………………………………… 8 分

$P(T=800)=P(XY\overline{Z})=0.8\times0.5\times(1-0.4)=0.24$, ………………………………………… 9 分

$P(T=2\,000)=P(XYZ)=0.8\times0.5\times0.4=0.16$, …………………………………………… 10 分

则 T 的分布列为

T	0	200	800	2 000
P	0.2	0.4	0.24	0.16

…… 11 分

$E(T)=0\times0.2+200\times0.4+800\times0.24+2\,000\times0.16=0+80+192+320=592$. ………

……………………………………………………………………………………………………… 13 分

【评分细则】

【1】第(1)问中,未写"$P(D)=P(\overline{X})+P(X\overline{Y})$",直接得到"$P(D)=1-0.8+0.8\times(1-0.5)=0.6$",不扣分.

【2】第(2)问中,未写"T 的可能取值为 0,200,800,2 000",但后面 $P(T=0)$,$P(T=200)$,$P(T=800)$,$P(T=2\,000)$的计算都正确,不扣分;计算 $E(T)$时,也可以写为 $E(T)=200\times0.4+800\times0.24+2\,000\times0.16=592$;$E(T)$写为 ET 不扣分.

16.**【解析】本题考查立体几何初步、空间向量及余弦定理,考查直观想象、数学运算及逻辑推理的核心素养.**

(1)证明:连接 AC. 因为 $AB=3$,$BC=2$,$\angle ABC=60^\circ$,所以由余弦定理得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\angle ABC=7$, ……………………………………………………………… 3 分

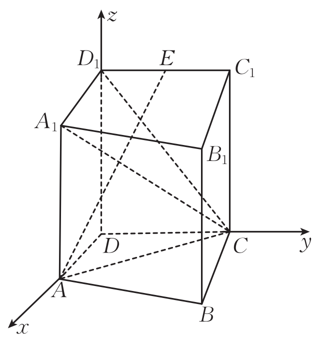
又 $AD=\sqrt{3}$,$CD=2$,所以 $AD^2+CD^2=AC^2$,则 $AD\perp CD$. ……………………………… 4 分

在直四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,$AA_1\perp$平面 $ABCD$,则 $AA_1\perp CD$. ………………… 5 分

因为 $AA_1\cap AD=A$,所以 $CD\perp$平面 ADD_1A_1. ………………………………………………… 6 分

又 $CD\subset$平面 CDD_1C_1,所以平面 $ADD_1A_1\perp$平面 CDD_1C_1. ……………………………… 7 分

(2)解:以 D 为坐标原点,建立如图所示的空间直角坐标系,则 $A(\sqrt{3},0,0)$,$C(0,2,0)$,$A_1(\sqrt{3},0,3)$,$D_1(0,0,3)$,$E(0,1,3)$, ……………………………………………………… 9 分



则 $\overrightarrow{AE}=(-\sqrt{3},1,3)$，$\overrightarrow{CA_1}=(\sqrt{3},-2,3)$，$\overrightarrow{A_1D_1}=(-\sqrt{3},0,0)$.
…………………………………………………… 10 分

设平面 A_1CD_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1D_1}=-\sqrt{3}x=0$，$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CA_1}=\sqrt{3}x-2y+3z=0$，…………………… 11 分

令 $y=3$，得 $\boldsymbol{n}=(0,3,2)$. ………………………………… 12 分

设直线 AE 与平面 A_1CD_1 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AE},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AE}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{9}{\sqrt{13}\times\sqrt{13}}=\dfrac{9}{13}$，………
…………………………………………………… 14 分

所以直线 AE 与平面 A_1CD_1 所成角的正弦值为$\dfrac{9}{13}$. …………………………… 15 分

【评分细则】

【1】第(1)问中，未写“$AA_1\cap AD=A$”，扣 1 分；未写“$CD\subset$平面 CDD_1C_1”，扣 1 分.

【2】第(2)问中，平面 A_1CD_1 的法向量不唯一，只要所求法向量与 $\boldsymbol{n}=(0,3,2)$平行即可，得到“设直线 AE 与平面 A_1CD_1 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AE},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AE}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{9}{\sqrt{13}\times\sqrt{13}}=\dfrac{9}{13}$”，但未写“所以直线 AE 与平面 A_1CD_1 所成角的正弦值为$\dfrac{9}{13}$”，不扣分.

17.**【解析】本题考查直线与双曲线的综合，考查逻辑推理与数学运算的核心素养.**

(1)解：依题意可得 $2+7=3+t$，………………………………………… 1 分

解得 $t=6$，…………………………………………………… 2 分

所以 N 的离心率为$\dfrac{\sqrt{3+6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$. ………………………………… 3 分

(2)证明：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

(ⅰ)将 $y=x+\sqrt{3}$代入$\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{6}=1$，得 $x^2-2\sqrt{3}x-9=0$，…………………… 4 分

则 $x_1+x_2=2\sqrt{3}$，$x_1x_2=-9$，$\Delta=12+36>0$，………………………… 5 分

所以$|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\times\sqrt{48}=\sqrt{96}>\sqrt{95}$. ……………… 7 分

(ⅱ)将 $y=kx+m$ 代入$\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{6}=1$，得$(2-k^2)x^2-2kmx-(m^2+6)=0$，

则 $2-k^2\neq0$，$\Delta=4k^2m^2+4(m^2+6)(2-k^2)=8(m^2-3k^2+6)>0$，……………… 8 分

$x_1+x_2=\dfrac{2km}{2-k^2}$，$x_1x_2=-\dfrac{m^2+6}{2-k^2}$. ………………………………… 9 分

因为直线 OA，OB 的斜率之积为$-km$，所以$\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}=\dfrac{(kx_1+m)(kx_2+m)}{x_1x_2}=-km$，………
…………………………………………………………… 10 分

则$(k^2+km)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=-(k^2+km)\cdot\dfrac{m^2+6}{2-k^2}+\dfrac{2k^2m^2}{2-k^2}+m^2=0$， …… 11 分

整理得 $6k^2-2m^2=-km(m^2+6)$. …………………………………………………………… 12 分

N 的左焦点的坐标为$(-3,0)$，假设直线 l 经过 N 的左焦点，则 $m=3k$， …………………… 13 分

则 $6k^2-18k^2=-3k^2(9k^2+6)$，

因为 $km\neq0$，所以 $k\neq0$，所以 $4=9k^2+6$，即 $9k^2=-2$， …………………………………… 14 分

这与 $9k^2\geqslant0$ 矛盾，所以假设不成立，故直线 l 不经过 N 的左焦点. …………………… 15 分

【评分细则】

【1】第(1)问中，N 的离心率也可以写为 $e=\sqrt{1+\dfrac{6}{3}}=\sqrt{3}$.

【2】第(2)(ⅰ)问中，未写"$\Delta>0$"，不扣分. 第(2)(ⅱ)问中，未写"$2-k^2\neq0$""$\Delta=8(m^2-3k^2+6)>0$"这两个式子中的任何一个，扣 1 分.

18.**【解析】本题考查数列的新定义，考查数学运算、数学抽象及逻辑推理的核心素养.**

(1)解：由 $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$，得 $a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}$，则$\{a_n\}$是等差数列. ………………… 1 分

设$\{a_n\}$的公差为 d，则 $4d=a_5-a_1=3a_1=12$，解得 $d=3$， ……………………………… 2 分

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=3n+1$. ……………………………………………………………… 3 分

$D_1=[4,8]$，$D_2=[7,14]$，$D_3=[10,20]$，$D_4=[13,26]$，$D_5=[16,32]$，$D_6=[19,38]$，$D_7=[22,44]$，则 $E_1=D_1=[4,8]$，$E_2=D_3=[10,20]$，$E_3=D_7=[22,44]$. ………………… 5 分

(2)证明：设 $E_n=D_{b_n}$，则 $b_1=1$.

设 $m\in\mathbf{N}^*$，$m>b_n$ 且 $E_n\cap D_m=\varnothing$，则$[a_{b_n},2a_{b_n}]\cap[a_m,2a_m]=\varnothing$，即$[3b_n+1,6b_n+2]\cap[3m+1,6m+2]=\varnothing$，则 $3m+1>6b_n+2$， ………………………………………… 6 分

即 $m>2b_n+\dfrac{1}{3}$，因为 $m\in\mathbf{N}^*$，所以 $m\geqslant2b_n+1$. …………………………………… 7 分

根据 E_n 的定义可知，$E_{n+1}=D_{2b_n+1}$，即 $b_{n+1}=2b_n+1$， ………………………………… 8 分

可得 $b_{n+1}+1=2(b_n+1)$，则$\{b_n+1\}$是首项为 2，公比为 2 的等比数列，则 $b_n+1=2^n$，即 $b_n=2^n-1$. ……………………………………………………………………………… 9 分

所以 $E_n=D_{2^n-1}=[3\cdot2^n-2,3\cdot2^{n+1}-4]$. ………………………………………………… 10 分

易证 $3\cdot2^n-2<3\cdot2^n<3\cdot2^{n+1}-4$，所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$\exists k\in\mathbf{N}^*$，$3\cdot2^n\in E_k$. ………… 11 分

(3)解：由 $4^k\in E_n$，可得 $3\cdot2^n-2\leqslant2^{2k}\leqslant3\cdot2^{n+1}-4$.

当 $n=1$ 时，$4\leqslant2^{2k}\leqslant8$，解得 $k=1$； ……………………………………………………… 12 分

当 $n\geqslant2$ 时，因为 $2^{n+1}=2\cdot2^n<3\cdot2^n-2$，$2^{n+2}-(3\cdot2^n-2)=2^n+2>0$，$2^{n+2}-(3\cdot2^{n+1}-4)=4-2^{n+1}<0$，$2^{n+3}=4\cdot2^{n+1}>3\cdot2^{n+1}-4$，即 $2^{n+1}<3\cdot2^n-2<2^{n+2}<3\cdot2^{n+1}-4<2^{n+3}$，所以 $2k=n+2$. ……………………………………………………………………………… 14 分

当 n 为奇数时，正整数 k 不存在；

当 n 为偶数时，$k=\dfrac{n+2}{2}$. ……………………………………………………………… 15 分

故当 t 为奇数时，$S(t)=4^1+4^2+\cdots+4^{\frac{t+1}{2}}=\dfrac{4-4^{\frac{t+1}{2}}\times 4}{1-4}=\dfrac{4^{\frac{t+3}{2}}-4}{3}$； …………………… 16 分

当 t 为偶数时，$S(t)=4^1+4^2+\cdots+4^{\frac{t}{2}}=\dfrac{4-4^{\frac{t+2}{2}}\times 4}{1-4}=\dfrac{4^{\frac{t+4}{2}}-4}{3}$. …………………… 17 分

【评分细则】

第(1)问中，求得 $E_2=[10,20]$ 与 $E_3=[22,44]$，各给 1 分.

19.**【解析】本题考查导数、函数、不等式的综合，考查逻辑推理、数学运算及直观想象的核心素养.**

(1)证明：因为 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$， …………………………………………………… 1 分

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为 $y-\dfrac{\ln x_0-mx_0}{x_0}=\dfrac{1-\ln x_0}{x_0^2}(x-x_0)$，

……………………………………………………………………………………………… 2 分

由该切线过原点，得 $-\dfrac{\ln x_0-mx_0}{x_0}=-x_0\cdot\dfrac{1-\ln x_0}{x_0^2}(x_0>0)$，

整理得 $-mx_0+2\ln x_0=1$，故 $-mx_0+2\ln x_0$ 为定值. ………………………………… 3 分

(2)(ⅰ)解：$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-m$，$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

令 $f'(x)>0$，得 $x\in(0,\mathrm{e})$，$f(x)$ 单调递增；

令 $f'(x)<0$，得 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$，$f(x)$ 单调递减.

故 $f(x)$ 的极大值为 $f(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}-m$. ……………………………………………… 4 分

当 $x\to 0$ 时，$f(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to-m$，当 $0<x<1$ 时，$f(x)<-m$，当 $x>1$ 时，$f(x)>-m$， ……………………………………………………………………… 5 分

若 $f(x)$ 恰有两个零点，则 $-m<0$，$\dfrac{1}{\mathrm{e}}-m>0$，得 $0<m<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. ………………………… 6 分

由 $g(x)=\dfrac{\ln\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}-m=f\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$， ……………………………………………………… 7 分

可得 $f(x)$ 恰有两个零点等价于 $g(x)$ 恰有两个零点，且 $0<x_3<x_4<1<x_1<x_2$.

故 m 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$. ………………………………………………… 8 分

(ⅱ)证明：由(ⅰ)得 $1<x_1<\mathrm{e}<x_2$，$0<x_3<\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}<x_4$，所以 $\dfrac{1}{x_3^2}>\mathrm{e}$，因为 $g(x_3)=f\left(\dfrac{1}{x_3^2}\right)=0$

$=f(x_2)$，所以 $\dfrac{1}{x_3^2}=x_2$，即 $x_3=\dfrac{1}{\sqrt{x_2}}$. …………………………………………… 9 分

同理得 $x_4=\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}$. …………………………………………………………………… 10 分

故 $x_1+x_2+x_3+x_4=x_1+x_2+\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x_2}}=x_1+x_2+\dfrac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1x_2}}$,

$\dfrac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1x_2}}>\dfrac{2\sqrt{\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}}}{\sqrt{x_1x_2}}=\dfrac{2}{\sqrt{\sqrt{x_1x_2}}}=\dfrac{2}{\sqrt[4]{x_1x_2}}$. ………………………………………… 11 分

又因为 $x_2>x_1>1$,所以$(x_1x_2)^2>x_1x_2$,得$\sqrt{x_1x_2}>\sqrt[4]{x_1x_2}$,

则$\dfrac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1x_2}}>\dfrac{2}{\sqrt[4]{x_1x_2}}>\dfrac{2}{\sqrt{x_1x_2}}>\dfrac{2}{\frac{x_1+x_2}{2}}=\dfrac{4}{x_1+x_2}$,

所以 $x_1+x_2+x_3+x_4>x_1+x_2+\dfrac{4}{x_1+x_2}$. ……………………………………………… 12 分

先证 $x_1+x_2>2\mathrm{e}$.

要证 $x_1+x_2>2\mathrm{e}$,只需证 $x_2>2\mathrm{e}-x_1$,

因为 $1<x_1<\mathrm{e}<x_2$,所以 $2\mathrm{e}-x_1>\mathrm{e}$,

而 $f(x)$在$(\mathrm{e},+\infty)$上单调递减,所以只需证 $f(2\mathrm{e}-x_1)>f(x_2)=f(x_1)$,

即证 $f(x_1)-f(2\mathrm{e}-x_1)<0$. ……………………………………………………………… 13 分

设 $F(x)=f(x)-f(2\mathrm{e}-x),x\in(1,\mathrm{e})$,

则 $F'(x)=f'(x)+f'(2\mathrm{e}-x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}+\dfrac{1-\ln(2\mathrm{e}-x)}{(2\mathrm{e}-x)^2}$

$=\dfrac{(2\mathrm{e}-x)^2+x^2-(2\mathrm{e}-x)^2\ln x-x^2\ln(2\mathrm{e}-x)}{x^2(2\mathrm{e}-x)^2}$

$=\dfrac{4\mathrm{e}(\mathrm{e}-x)(1-\ln x)+x^2\{2-\ln[x(2\mathrm{e}-x)]\}}{x^2(2\mathrm{e}-x)^2}$. ………………………………………… 14 分

因为 $x\in(1,\mathrm{e}),x(2\mathrm{e}-x)<\mathrm{e}^2$,所以 $\ln[x(2\mathrm{e}-x)]<2$,得 $x^2\{2-\ln[x(2\mathrm{e}-x)]\}>0$,

而$(\mathrm{e}-x)(1-\ln x)>0$,所以 $F'(x)>0$,

得 $F(x)$在$(1,\mathrm{e})$上单调递增,所以 $F(x)<F(\mathrm{e})=0$,则 $f(x_1)-f(2\mathrm{e}-x_1)<0$,即 $x_1+x_2>2\mathrm{e}$,得证. …………………………………………………………………………………… 15 分

令 $t=x_1+x_2>2\mathrm{e},h(t)=t+\dfrac{4}{t},h'(t)=1-\dfrac{4}{t^2}=\dfrac{(t+2)(t-2)}{t^2}>0$,

得 $h(t)=t+\dfrac{4}{t}$在$(2\mathrm{e},+\infty)$上单调递增,

所以 $h(t)=t+\dfrac{4}{t}>h(2\mathrm{e})=2\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$,故 $x_1+x_2+x_3+x_4>2\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$. ………… 17 分

【评分细则】

第(2)(ⅰ)问还可以这样解答:

令 $f(x)=0$,得$\dfrac{\ln x}{x}=m$,令 $g(x)=0$,得$-2x^2\ln x=m$,

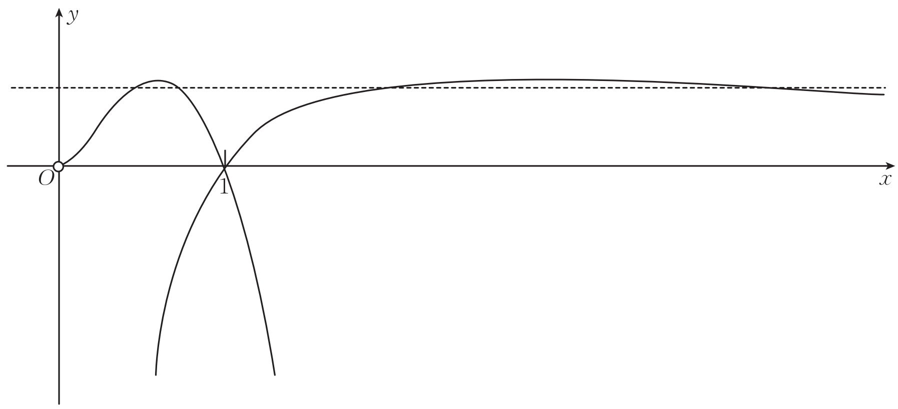
设 $p(x)=\frac{\ln x}{x}$，$q(x)=-2x^2\ln x$，则 $p'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，$q'(x)=-2x(1+2\ln x)$. …… 4 分

由 $p'(x)>0$，得 $x\in(0,\mathrm{e})$，$p(x)$单调递增；由 $p'(x)<0$，得 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$，$p(x)$单调递减.

由 $q'(x)>0$，得 $x\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$，$q(x)$单调递增；由 $q'(x)<0$，得 $x\in\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}},+\infty\right)$，$q(x)$单调递减. …………………………………………………………………………………………… 5 分

故 $p(x)$的极大值为 $p(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$，$q(x)$的极大值为 $q\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}$. ………………………… 6 分

当 $x\to0$ 时，$q(x)\to0$，当 $0<x<1$ 时，$q(x)>0$，$p(x)<0$，当 $x>1$ 时，$q(x)<0$，$p(x)>0$，当 $x\to+\infty$时，$p(x)\to0$. ……………………………………………………………………… 7 分



由图可知，m 的取值范围是$\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$. ……………………………………………………… 8 分

注：m 的取值范围写为 $0<m<\frac{1}{\mathrm{e}}$，不扣分.